

Sesión 4: Las matemáticas y el espacio de posibilidad

¿Es correcto pensar en las proposiciones matemáticas como descripciones del mundo?

I. Realismo y anti-realismo

I.1. ¿Qué quiere decir que un enunciado de identidad sea *objetivamente verdadero*?

- Para que un enunciado de identidad sea *objetivamente verdadero* tiene que ser verdadero con respecto al espacio de posibilidad *objetivamente correcto*.

I.2. ¿Qué quiere decir que una concepción del espacio de posibilidad sea *objetivamente correcta*?

- *Una respuesta posible:*

No tiene sentido hablar corrección objetiva. Adoptar una concepción del espacio de posibilidad es una decisión práctica—pero una decisión práctica que depende, en parte, de cómo sea el mundo.



Una analogía

- Los enunciados de identidad son como aseveraciones acerca de las *reglas* del juego.
 - La verdad de una aseveración acerca de las reglas depende enteramente del juego que estemos jugando.
 - La verdad de un enunciado de identidad depende enteramente de nuestra concepción del espacio de posibilidad.
- Los enunciados contingentes son como aseveraciones acerca del *marcador* del juego.
 - La verdad de una aseveración acerca de las reglas depende del juego que estemos jugando, y de cómo es el mundo
 - La verdad de un enunciado de identidad depende de nuestra concepción del espacio de posibilidad, y de cómo es el mundo
- Así como no tiene sentido hablar del juego con reglas ‘objetivamente correctas’, no tiene sentido hablar de la concepción del espacio de posibilidad basado en aquellos enunciados de identidad ‘objetivamente verdaderos’.
- La decisión de qué reglas adoptar es una decisión práctica—pero una decisión práctica que depende, en parte, de cómo sea el mundo. De igual modo, la decisión de qué concepción del espacio de posibilidad aceptar es una decisión práctica—pero una decisión práctica que depende, en parte, de cómo sea el mundo.

El punto clave

Hay un hecho objetivo acerca de cómo es el mundo, pero la única manera que tenemos de responder a la pregunta de cómo es el mundo es introduciendo distinciones, y no hay una respuesta objetiva—independiente de consideraciones pragmáticas—a la pregunta de qué distinciones utilizar.

- *Otra respuesta posible:*

Hay una manera de entender la verdad objetiva de un enunciado de identidad (o la corrección objetiva de una concepción del espacio de posibilidad) que va más allá de lo que hemos considerado aquí.

2. El plan de acción

2.1. La tesis básica

Dinosaurios

Que el número de los dinosaurios sea cero *es simplemente* que no haya dinosaurios.

Números

Que el número de las *F*s sea *n* *es simplemente* que haya *n* *F*s.

2.2. El argumento

1. No hay impedimentos *lingüísticos* para aceptar **Números**.
2. Las ventajas de aceptar **Números** justifican los costos.
3. Es posible desarrollar una filosofía de la matemática sobre la base de **Números**:
 - a) Es posible desarrollar una *semántica*.
 - b) Es posible desarrollar una *epistemología*.

3. Ventajas y desventajas de aceptar Números

1. Ventajas:

No hay que responder a la pregunta siguiente:

La pregunta incómoda

Sé que no hay dinosaurios. Lo que me gustaría saber es si es *además* verdad que el número de los dinosaurios es cero. Y me gustaría entender cómo es que uno podría estar justificado en tener una opinión al respecto, dado que no tenemos ningún tipo de acceso causal al mundo de los objetos abstractos.

2. Desventajas:

No podemos trabajar con posibilidades de acuerdo con las cuales: (a) no hay dinosaurios, y (b) no es el caso que el número de los dinosaurios sea cero.

4. El trivialismo platónico

4.1. Definiciones

Platonismo matemático

Existen objetos matemáticos.

Trivialismo matemático

Las verdades de la matemática pura tienen condiciones de verdad *triviales*, y las falsedades de la matemática pura tienen condiciones de verdad *imposibles*.

El trivialismo platónico

Tanto el trivialismo matemático como el platonismo matemático son verdaderos.

4.2. ¿Por qué terminamos en el trivialismo?

1. No hay números (reducción al absurdo)
2. Que el número de números sea cero *es simplemente* que no haya números (**Números**)
3. El número de los números es cero (de 1. y 2.)
4. El cero existe (de 3.)
5. Hay números (de 4.)
6. *Conclusión*: es absurdo suponer que no hay números.

4.3. Objeciones

4.3.1. ¿Una asignación de significados inaceptable?

- Las condiciones de verdad de un enunciado no tiene por qué agotar su significado.

4.3.2. ¿Una metafísica inaceptable?

- ¿No perderíamos la idea de que hay un hecho objetivo acerca de cómo es el mundo, independiente de cómo lo describamos?
- ¿No sería el mundo una masa desestructurada?
- ¿No terminaríamos con una posición de acuerdo con la cual la existencia de los objetos está constituida por nuestro uso del lenguaje?

4.4. Paráfrasis

- El que exista un método general de paráfrasis depende de los recursos expresivos de nuestro lenguaje.

Teorema

Es *imposible* encontrar un método general de paráfrasis cuando nuestros recursos expresivos están limitados a lenguajes de algún orden superior finito.

- Las paráfrasis serían importantes para un *nominalista*, pero no para nosotros.

A nosotros nos interesa tener una semántica, *pero no tenemos por qué formular nuestra semántica sin utilizar vocabulario matemático.*

4.5. Una semántica para trivialistas platónicos

1. *Aritmética*

¿Cómo especificar condiciones de verdad para ' $\#_x(\text{Dinosaurio}(x)) = 0$ '?

Especificación externa

el número de las zs tales que $[z \text{ es un planeta}]_w = 0$

Especificación interna

$[\text{el número de las } zs \text{ tales que } z \text{ es un planeta} = 0]_w$

2. *Teoría de conjuntos*

5. Apéndice técnico: una semántica para el lenguaje de la aritmética

5.1. Denotación de términos aritméticos

1. $\delta_{\sigma,w}(\ulcorner n_i \urcorner) = \sigma(\ulcorner n_i \urcorner)$
2. $\delta_{\sigma,w}(\ulcorner 0 \urcorner) = \text{el número cero}$
3. $\delta_{\sigma,w}(\ulcorner S(t) \urcorner) = \delta_{\sigma,w}(t) + 1$
4. $\delta_{\sigma,w}(\ulcorner t_1 + t_2 \urcorner) = \delta_{\sigma,w}(t_1) + \delta_{\sigma,w}(t_2)$
5. $\delta_{\sigma,w}(\ulcorner t_1 \times t_2 \urcorner) = \delta_{\sigma,w}(t_1) \times \delta_{\sigma,w}(t_2)$
6. $\delta_{\sigma,w}(\ulcorner \#_{x_i}(\phi(x_i)) \urcorner) = \text{el número de } zs \text{ tales que } \text{Sat}(\ulcorner \phi(x_i) \urcorner, \sigma^{z/\ulcorner x_i \urcorner}, w)$
7. $\delta_{\sigma,w}(\ulcorner \#_{n_i}(\phi(n_i)) \urcorner) = \text{el número de } ms \text{ tales que } \text{Sat}(\ulcorner \phi(n_i) \urcorner, \sigma^{m/\ulcorner n_i \urcorner}, w)$

5.2. Denotation of non-arithmetical terms:

1. $\delta_{\sigma,w}(\ulcorner x_i \urcorner) = \sigma(\ulcorner x_i \urcorner)$
2. $\delta_{\sigma,w}(\ulcorner \text{César} \urcorner) = \text{Cayo Julio César}$
3. $\delta_{\sigma,w}(\ulcorner \text{Tierra} \urcorner) = \text{el planeta Tierra}$

5.3. Satisfaction:

Donde $\ulcorner \phi \urcorner_w$ se lee $\ulcorner$ es verdad en w que $\phi \urcorner$,

1. $\text{Sat}(\ulcorner \exists n_i \phi \urcorner, \sigma, w) \leftrightarrow \text{hay un número } m \text{ tal que } \text{Sat}(\phi, \sigma^{m/\ulcorner n_i \urcorner}, w)$
2. $\text{Sat}(\ulcorner \exists x_i \phi \urcorner, \sigma, w) \leftrightarrow \text{hay una } z \text{ tal que } ([\exists y(y = z)]_w \wedge \text{Sat}(\phi, \sigma^{z/\ulcorner x_i \urcorner}, w))$
3. $\text{Sat}(\ulcorner t_1 = t_2 \urcorner, \sigma, w) \leftrightarrow \delta_{\sigma,w}(t_1) = \delta_{\sigma,w}(t_2)$
4. $\text{Sat}(\ulcorner \text{Planeta}(t) \urcorner, \sigma, w) \leftrightarrow [\delta_{\sigma,w}(t) \text{ es un planeta}]_w$ (donde t es un término no aritmético)
5. $\text{Sat}(\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner, \sigma, w) \leftrightarrow \text{Sat}(\phi, \sigma, w) \wedge \text{Sat}(\psi, \sigma, w)$
6. $\text{Sat}(\ulcorner \neg \phi \urcorner, \sigma, w) \leftrightarrow \neg \text{Sat}(\phi, \sigma, w)$